

CULTURA
Studium
130.



Istituzioni / 4.

FRANCESCA BARESI, LAURA MONTAGNOLI

ISTITUZIONI DI MATEMATICA

**Teorie e attività per la scuola dell'infanzia e
per la scuola primaria**

• • •
Studium
edizioni

Tutti i volumi pubblicati nelle collane dell'editrice Studium "Cultura" ed "Universale" sono sottoposti a doppio referaggio cieco. La documentazione resta agli atti. Per consulenze specifiche, ci si avvale anche di professori esterni al Comitato scientifico, consultabile all'indirizzo web <http://www.edizionistudium.it/content/comitato-scientifico-0>.

Copyright © 2018 by Edizioni Studium - Roma

ISBN 978-88-382-4683-8

www.edizionistudium.it

Indice

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | LA MATEMATICA E I SUOI LINGUAGGI | 15 |
| 1.1 | Il sistema assiomatico | 16 |
| 1.2 | Il linguaggio matematico e la rappresentazione | 21 |
| 1.2.1 | La costruzione di modelli e i materiali strutturati | 22 |
| 1.3 | Attività di laboratorio | 29 |
| 2 | LA LOGICA E L'INSIEMISTICA | 31 |
| 2.1 | La logica delle proposizioni | 32 |
| 2.1.1 | I connettivi monoargomentali | 34 |
| 2.1.2 | I connettivi biargomentali | 36 |
| 2.2 | Gli insiemi | 43 |
| 2.2.1 | La rappresentazione di un insieme | 44 |
| 2.2.2 | I sottoinsiemi | 46 |
| 2.3 | Le partizioni di un insieme | 47 |
| 2.4 | Il prodotto cartesiano | 48 |
| 2.5 | La logica dei predicati | 49 |
| 2.5.1 | I quantificatori | 51 |
| 2.5.2 | La rappresentazione di un insieme tramite proprietà caratteristica | 54 |
| 2.5.3 | La logica delle proposizioni e i diagrammi di Eulero- Venn | 55 |
| 2.6 | Attività di laboratorio | 57 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3 | LE RELAZIONI | 60 |
| 3.1 | La rappresentazione di una relazione | 61 |
| 3.2 | Le relazioni di un insieme in se stesso | 64 |
| 3.2.1 | Le relazioni d'equivalenza | 67 |
| 3.2.2 | Le relazioni d'ordine | 69 |
| 3.3 | Le funzioni | 70 |
| 3.4 | Attività di laboratorio | 73 |
| 4 | LE CLASSIFICAZIONI | 75 |
| 4.1 | Le classificazioni in base a un attributo | 77 |
| 4.2 | Le classificazioni in base a due attributi | 78 |
| 4.3 | Le classificazioni in base a più di due attributi | 82 |
| 4.4 | Attività di laboratorio | 83 |
| 5 | I NUMERI NATURALI | 85 |
| 5.1 | La costruzione e le proprietà di \mathbb{N} | 86 |
| 5.1.1 | L'aspetto cardinale | 88 |
| 5.1.2 | L'aspetto ordinale | 89 |
| 5.2 | Il sistema di numerazione decimale posizionale | 91 |
| 5.2.1 | Lo zero | 97 |
| 5.2.2 | I sistemi di numerazione romano ed egizio | 101 |
| 5.3 | Attività di laboratorio | 103 |
| 6 | LE OPERAZIONI IN \mathbb{N} | 106 |
| 6.1 | L'addizione | 108 |
| 6.2 | La sottrazione | 114 |
| 6.2.1 | La relazione «minore o uguale» | 114 |
| 6.2.2 | La sottrazione | 115 |
| 6.3 | La moltiplicazione | 119 |
| 6.4 | La divisione | 124 |
| 6.4.1 | La relazione «multiplo» | 124 |
| 6.4.2 | La divisione | 126 |
| 6.5 | Le espressioni aritmetiche | 135 |
| 6.6 | I calcoli a mente | 136 |
| 6.6.1 | Alcune strategie per la memorizzazione delle tabelline | 140 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 6.7 | La prova delle operazioni | 143 |
| 6.8 | Alcuni algoritmi alternativi a quelli usuali | 146 |
| 6.9 | Alcune curiosità sui numeri naturali | 152 |
| 6.9.1 | I divisori e i criteri di divisibilità | 153 |
| 6.9.2 | I numeri primi, l'm.c.m e l'M.C.D. | 155 |
| 6.9.3 | I numeri perfetti | 156 |
| 6.9.4 | I numeri quadrati | 156 |
| 6.10 | Attività di laboratorio | 157 |
| 7 | I NUMERI INTERI | 163 |
| 7.1 | Le operazioni in \mathbb{Z} | 166 |
| 7.2 | Attività di laboratorio | 168 |
| 8 | I NUMERI RAZIONALI | 172 |
| 8.1 | La scrittura frazionaria dei numeri razionali assoluti | 176 |
| 8.2 | Il confronto tra frazioni particolari | 179 |
| 8.3 | I numeri razionali assoluti come quoziente | 180 |
| 8.4 | La scrittura decimale dei numeri razionali assoluti | 181 |
| 8.4.1 | I numeri con la virgola e loro cifre | 186 |
| 8.5 | Il confronto tra frazioni generiche | 188 |
| 8.6 | I numeri razionali assoluti nei diversi contesti | 189 |
| 8.6.1 | La frazione come operatore | 189 |
| 8.6.2 | La frazione come rapporto di due realtà non incluse l'una nell'altra | 191 |
| 8.6.3 | La frazione come espressione della probabilità | 192 |
| 8.7 | Le operazioni tra frazioni | 192 |
| 8.7.1 | L'addizione | 193 |
| 8.7.2 | La sottrazione | 194 |
| 8.7.3 | L'addizione e la sottrazione nella didattica | 195 |
| 8.7.4 | La moltiplicazione | 196 |
| 8.7.5 | La moltiplicazione nella didattica | 197 |
| 8.7.6 | La divisione | 197 |
| 8.8 | Alcune questioni didattiche legate ai numeri razionali assoluti | 199 |
| 8.9 | Gli algoritmi delle operazioni per i numeri decimali | 201 |
| 8.10 | I numeri razionali (\mathbb{Q}) | 204 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 8.11 | I numeri reali (\mathbb{R}) | 204 |
| 8.12 | Attività di laboratorio | 205 |
| 9 | LA STATISTICA | 208 |
| 9.1 | La statistica e le sue finalità | 209 |
| 9.2 | Un'indagine statistica | 211 |
| 9.2.1 | La somministrazione di un questionario | 211 |
| 9.2.2 | L'elaborazione dei dati | 213 |
| 9.2.3 | La rappresentazione grafica | 217 |
| 9.2.4 | La determinazione dei valori medi: media aritmetica, moda, mediana | 223 |
| 9.3 | Attività di laboratorio | 225 |
| 10 | LA PROBABILITÀ | 227 |
| 10.1 | La probabilità matematica | 228 |
| 10.1.1 | L'approccio classico | 232 |
| 10.1.2 | L'approccio frequentista | 235 |
| 10.1.3 | L'approccio soggettivista | 236 |
| 10.2 | Attività di laboratorio | 237 |
| 11 | LO SPAZIO FISICO | 239 |
| 11.1 | Le caratteristiche dello spazio fisico | 240 |
| 11.2 | Le localizzazioni | 241 |
| 11.2.1 | I binomi locativi | 242 |
| 11.2.2 | La rappresentazione degli oggetti | 245 |
| 11.3 | I percorsi e le lunghezze | 246 |
| 11.3.1 | Le caratteristiche di un percorso | 246 |
| 11.3.2 | La lunghezza di un percorso | 248 |
| 11.4 | I sistemi di riferimento oggettivi | 251 |
| 11.4.1 | Le mappe | 252 |
| 11.4.2 | I reticoli | 253 |
| 11.5 | Attività di laboratorio | 253 |

| | |
|---|-----|
| 12 DALLO SPAZIO FISICO ALLO SPAZIO GEOMETRICO | 261 |
| 12.1 Gli Elementi di Euclide | 266 |
| 12.2 Lo spazio geometrico | 269 |
| 12.3 La rappresentazione degli enti | 270 |
| 13 GLI ENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI | 275 |
| 13.1 Il punto | 276 |
| 13.2 La retta | 277 |
| 13.3 Il piano | 277 |
| 13.4 Le proprietà degli enti fondamentali | 278 |
| 13.5 Un accenno alle Geometrie non euclidee | 281 |
| 13.6 Le linee | 284 |
| 13.7 La lunghezza di una linea | 286 |
| 13.8 Costruzioni geometriche | 286 |
| 13.9 Attività di laboratorio | 287 |
| 14 LE SEMIRETTE E I SEGMENTI | 289 |
| 14.1 La semiretta | 289 |
| 14.2 Il segmento | 290 |
| 14.2.1 Le posizioni reciproche di due segmenti del piano | 291 |
| 14.3 Le spezzate | 292 |
| 14.4 La congruenza tra figure e il confronto tra segmenti | 294 |
| 14.5 Costruzioni geometriche | 295 |
| 14.6 Attività di laboratorio | 296 |
| 15 GLI ANGOLI | 298 |
| 15.1 Le posizioni reciproche tra due angoli | 300 |
| 15.2 Il confronto | 300 |
| 15.3 La classificazione | 303 |
| 15.4 Il Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale | 304 |
| 15.5 L'ampiezza | 306 |
| 15.6 Costruzioni geometriche | 307 |
| 15.7 Attività di laboratorio | 309 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 16 | LA PERPENDICOLARITÀ E LE DISTANZE | 316 |
| 16.1 | La perpendicolarità tra rette e tra segmenti | 317 |
| 16.2 | Le distanze | 317 |
| 16.3 | Alcuni luoghi geometrici | 318 |
| 16.3.1 | Il punto medio e l'asse di un segmento | 319 |
| 16.3.2 | La bisettrice di un angolo | 319 |
| 16.4 | I sistemi di riferimento notevoli | 319 |
| 16.4.1 | Le coordinate cartesiane | 320 |
| 16.4.2 | Le coordinate polari | 322 |
| 16.5 | Costruzioni geometriche | 323 |
| 16.6 | Attività di laboratorio | 324 |
| 17 | LE TRASFORMAZIONI DEL PIANO | 329 |
| 17.1 | Le isometrie | 330 |
| 17.1.1 | La traslazione | 330 |
| 17.1.2 | La simmetria assiale | 331 |
| 17.1.3 | La simmetria centrale | 333 |
| 17.1.4 | La rotazione | 334 |
| 17.2 | Le figure simmetriche e con un centro di rotazione | 335 |
| 17.3 | Le similitudini | 337 |
| 17.4 | Attività di laboratorio | 338 |
| 18 | I POLIGONI | 345 |
| 18.1 | I vertici, i lati e le diagonali | 346 |
| 18.1.1 | La condizione di costruibilità | 346 |
| 18.1.2 | Le diagonali | 347 |
| 18.2 | Gli angoli interni ed esterni | 348 |
| 18.3 | Attività di laboratorio | 352 |
| 19 | I POLIGONI PARTICOLARI | 358 |
| 19.1 | I triangoli | 358 |
| 19.1.1 | La classificazione e le proprietà | 360 |
| 19.2 | Gli elementi notevoli | 361 |
| 19.3 | I quadrilateri | 363 |
| 19.3.1 | La classificazione e le proprietà | 364 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 19.4 | Attività di laboratorio | 370 |
| 20 | IL PERIMETRO, L'ALTEZZA E L'AREA | 374 |
| 20.1 | Il perimetro | 375 |
| 20.2 | L'altezza | 376 |
| 20.2.1 | Le altezze di un triangolo | 376 |
| 20.2.2 | Le altezze di un quadrilatero | 377 |
| 20.3 | L'area | 378 |
| 20.3.1 | L'area del rettangolo | 380 |
| 20.3.2 | L'area del parallelogramma | 381 |
| 20.3.3 | L'area del triangolo | 382 |
| 20.3.4 | Le aree di altri poligoni | 382 |
| 20.4 | Costruzioni geometriche | 387 |
| 20.5 | Attività di laboratorio | 387 |
| 21 | IL CERCHIO E I POLIGONI REGOLARI | 393 |
| 21.1 | Le posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza | 394 |
| 21.2 | Gli angoli al centro e alla circonferenza | 395 |
| 21.3 | Il numero irrazionale π , la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio | 396 |
| 21.4 | I poligoni inscritti e circoscritti | 397 |
| 21.4.1 | I poligoni inscritti | 397 |
| 21.4.2 | I poligoni circoscritti | 399 |
| 21.5 | L'area dei poligoni circoscritti | 399 |
| 21.6 | I poligoni regolari | 400 |
| 21.6.1 | L'area dei poligoni regolari | 402 |
| 21.7 | Costruzioni geometriche | 404 |
| 21.8 | Attività di laboratorio | 406 |
| 22 | LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO | 413 |
| 22.1 | Le proprietà degli enti fondamentali | 414 |
| 22.2 | I diedri e la perpendicolarità | 416 |
| 22.3 | Le distanze | 418 |
| 22.4 | Gli angoloidi | 419 |
| 22.5 | La simmetria rispetto a un piano | 419 |

| | | |
|--------|-----------------------------------|-----|
| 22.6 | I poliedri | 420 |
| 22.6.1 | I prismi | 421 |
| 22.6.2 | I parallelepipedi | 422 |
| 22.6.3 | Le piramidi | 423 |
| 22.6.4 | I poliedri regolari | 425 |
| 22.7 | I solidi di rotazione | 431 |
| 22.8 | Attività di laboratorio | 433 |
| 23 | APPENDICE | 437 |

INTRODUZIONE

L'insegnamento è un'attività creativa, che presuppone che il docente padroneggi una serie di competenze, tra le quali la solida conoscenza della disciplina che insegna, la capacità di mettersi in relazione con i propri studenti e di trovare strade alternative e adatte all'interazione con ciascuno di essi, la duttilità nel progettare e pianificare a seconda delle esigenze della singola classe. Conoscendo la complessità sottesa a tutte queste azioni, con questo testo intendiamo fornire qualche spunto a diversi livelli.

Anzitutto enunciamo le *basi teoriche* della logica, dell'insiemistica, dell'aritmetica, della statistica, della probabilità e della geometria piana e tridimensionale, argomenti cardine per l'apprendimento della matematica, ripercorrendo tutto il sapere matematico che, con la dovuta mediazione, viene proposto ai bambini della scuola dell'infanzia come «esperienza» e agli studenti della scuola primaria con varie modalità didattiche. Nel corso della trattazione motiviamo la presenza di questi temi nel percorso d'apprendimento degli studenti e facciamo emergere i *significati sottesi a ciascun concetto*. L'inquadramento teorico non poggia su formalismi e strutture marcatamente matematiche: questa scelta è stata fatta affinché il contenuto possa essere più facilmente avvicinato e compreso anche dal lettore meno allenato a tale modalità di trattazione.

Come incipit di ogni capitolo, prima di introdurre il lettore al contenuto teorico, proponiamo una o più *situazioni reali* che coinvolgono i concetti che saranno poi affrontati. In questo modo intendiamo sottolineare lo stesso legame che intercorre tra i diversi campi della matematica e le esperienze che già in tenera età un bambino può vivere.

Accanto all'enunciazione dei risultati teorici presentiamo alcune *osservazio-*